PEDRO ABELLANAS

ESTRUCTURA ANALITICA DEL SEGMENTO ABIERTO DEFINIDO POR LOS POSTULADOS DE INCIDENCIA Y ORDEN DE HILBERT

(Publicado en la «Revista Hispano-Americana»,
4.ª Serie-Tomo VI-1946)

NUEVAS GRAFICAS, S. A.
MADRID - 1946

ESTRUCTURA ANALITICA DEL SEGMENTO ABIERTO DEFINIDO POR LOS POSTULADOS DE INCIDENCIA Y ORDEN DE HILBERT

por

PEDRO ABELLANAS

Es sabido (*) que mediante los postulados de incidencia, ordenación y paralelismo, pueden definirse las operaciones de adición y multiplicación con los puntos de una recta, demostrándose que: El conjunto de todos los puntos de una recta forman un cuerpo no conmutativo. En el presente trabajo nos ocupamos de estudiar una generalización de este resultado para los segmentos abiertos del espacio topológico definido por los postulados de incidencia y orden de Hilbert, esto es, prescindiendo del postulado de paralelismo. Como es natural, la estructura algebraica que obtenemos es mucho más complicada que la de los cuerpos no conmutativos.

En el § 1.° nos ocupamos de la generalización de los teoremas de Desargues para los trivértices, triláteros y cuadrivértices homológicos.

En el § 2.° definimos una adición y una multiplicación con los puntos de un segmento abierto y demostramos en qué casos poseen las propiedades formales.

Suponemos conocidas del lector las definiciones de rayo, segmento, orientación, ordenación, semiplano, regiones angulares, teoremas de incidencia, etc.

§ 1.°

TEOREMA 1.—Si a, b, c y a', b', c' son dos triláteros de un mismo plano y llamamos

$$A=b \cap c, B=c \cap a, C=a \cap b, A'=b' \cap c', B'=c' \cap a', C'=a' \cap b',$$
$$M=a \cap a', N=b \cap b', P=c \cap c';$$

si se verifica que M, N y P son puntos de una recta r y si las rectas AA' y BB' se cortan en un punto R, la recta CC' pasa también por R.

(*) Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.*

Demostración: Para que el teorema esté determinado o no sea una trivialidad supondremos que los vértices A y A′, B y B′, C y C′, son distintos. La recta r cortará, por tanto, a dos de los lados de las triláteras $\{ABC\}$, $\{A'B'C'\}$ o a ninguno. En virtud de la simetría de las hipótesis distinguiremos los siguientes casos:

1.° El punto M pertenece a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ y el punto N a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$. Este caso coincide con los siguientes: M pertenece a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ y P pertenece a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. N pertenece a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ y P a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$.

2.° El punto M pertenece a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, el punto N pertenece al lado $\overline{AC}$ y P al $\overline{B'C'}$. Este caso coincide con el siguiente: el punto M pertenece a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, el punto N pertenece a $\overline{BC}$ y P a $\overline{A'C'}$.

3.° El punto N pertenece a $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, el punto M pertenece a $\overline{AB}$ y el punto P pertenece a $\overline{B'C'}$. Este caso coincide con los siguientes: el punto P perteneec a $\overline{BC}$, el punto M a $\overline{A'B'}$ y el punto N a $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$. El punto P pertenece a $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, el punto N pertenece a $\overline{AC}$ y el punto M pertenece a $\overline{A'B'}$. El punto P pertenece a $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, el punto M pertenece a $\overline{A'B'}$ y el punto N pertenece a $\overline{AC}$.

4.° M pertenece $\overline{AB}$, N a $\overline{AC}$ y la recta r es exterior a A′B′C′. Este caso coincide con los siguientes: M pertenece a $\overline{AB}$, P pertenece a $\overline{BC}$ y r es exterior a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$. M pertenece a $\overline{A'B'}$, N pertenece $\overline{A'C'}$ y r es exterior a $\overset{\triangle}{ABC}$. M pertenece a $\overline{A'B'}$, P pertenece a $\overline{B'C'}$ y r es exterior a $\overset{\triangle}{ABC}$.

5.° N pertenece a $\overline{AC}$, P pertenece a $\overline{BC}$ y r es exterior a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$. Este caso coincide con el siguiente: N pertenece a $\overline{A'C'}$, P pertenece a $\overline{B'C'}$ y r es exterior a $\overset{\triangle}{ABC}$.

6.° r es exterior a $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$.

1.° Entre los puntos A, A' y R pueden existir las siguientes relaciones: 1_a) (AA'R) (*), 1_b) (A'AR), 1_c) (ARA').

1_a) De las relaciones (AA'R), (AMB) y el 4.° postulado de den (**), resulta (en la trilátera {ABR}) que (B'BR).

1_b) De (A'AR), de (AMB) y de O_4 resulta, en la trilátera {ABR}, que (BB'R).

1_c) (fig. 1) De (ARA') resulta que R y A' están en el mismo semiplano π' respecto de AB; por otra parte, de (B'MA') resulta que B' y A' están en distinto semiplano respecto de AB, luego B' y R están en distinto rayo de origen B e. e. se verificará (B'BR), pero, como la recta A'B' corta al lado AB de la trilátera {ABR} en un punto interior y no corta al lado AR, cortará a $\overline{BR}$ en un punto interior, tendrá, por tanto, dos puntos comunes con esta recta y coincidirá con ella; luego M coincidirá con B y A' con R; la recta r pasa por un vértice (B) de ABC, luego si no coincide con BC, cortará al lado BC únicamente en B y, por tanto, M≡P, resulta de aquí que B'C' coincidirá con B'A' y que el

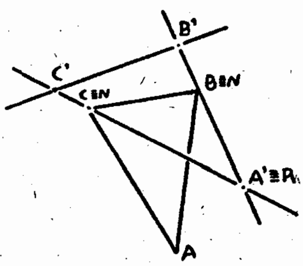

Figura 1

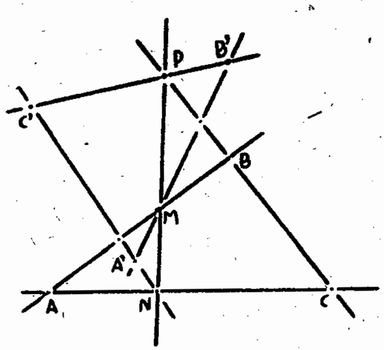

Figura 2

triángulo A'B'C' no existe; luego r debe coincidir con BC; el punto N de intersección de r con A'C' pertenece a AC, y si esta recta es distinta de BC, resulta que N≡C y resulta que CεA'C'≡≡RC', y el teorema está demostrado; luego excluiremos este caso.

2.° En este caso B' está en distinto semiplano que A' y C' respecto de la recta r, y lo mismo sucede a A respecto de B y C.

(*) Con la notación (AA'R) indicamos que el punto A' *está entre* A y R.

(**) A este postulado lo representaremos también por O_4. Véase: Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, pág. 5.ª, 4.ª edición.

Como en el caso anterior, pueden presentarse los siguientes subcasos: 2_a) (fig. 2) (AA'R), 2_b) (A'AR) y 2_c) (ARA').

En el caso 2_a) resulta, como antes, que (AA'R) y (B'BR).

En el caso 2_b) se verifica (A'AR) y (BB'R).

En el caso 2_c) resulta, como en el caso 1_c), que $B \equiv M$ y $A' \equiv R$, si r no coincide con BC, resulta que $M \equiv P$; luego, $B'C' \equiv B'A'$ y no existiría triángulo; por tanto, $r \equiv BC$, luego $C \equiv N$, y estamos exactamente en el caso 1_c).

3.° En este caso no pueden verificarse simultáneamente las relaciones (AA'R) y (BB'R), análogamente, tampoco pueden verificarse las relaciones (A'AR) y (B'BR). En efecto: si fuese (AA'R) y (BB'R), la recta A'B' no podría cortar al lado AB del triángulo ABR ni la AB podría cortar al lado A'B' del triángulo RA'B', luego M no podría ser interior ni a AB ni A'B', en contradicción con la hipótesis.

Si $M \varepsilon \overline{AB}$ la recta A'B', por cortar al lado $\overline{AB}$, de la trilátera $\{ARB\}$, cortará por lo menos a otro; si pasase por R sería $A' \equiv B'$, luego sólo corta a uno de los otros dos lados, si corta al $\overline{AR}$ se verificará 3_a) (fig. 3) (AA'R) y (BRB'), y si corta al $\overline{RB}$,

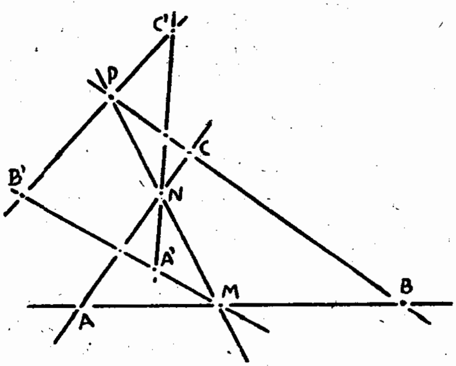

Figura 3

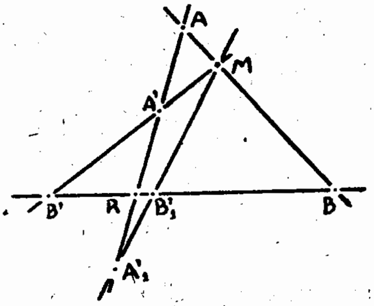

Figura 4

será 3_b) (fig. 4) (ARA') y (BB'R). En la hipótesis de que M pertenezca a $\overline{A'B'}$ será: 3_c) (A'AR) y (BRB') ó 3_d) (A'RA) y (B'BR) Ahora bien, en la hipótesis de que $M \varepsilon \overline{AB}$, resulta que $P \varepsilon \overline{B'C'}$, luego C' está en distinto semiplano respecto de R que A' y B'; si se verifican los casos 3_a) ó 3_b), A' y B' están en el mismo semiplano respecto de r y en distinto que C'. Si se verifican los subcasos 3_c) ó 3_d), A y B están en el mismo semiplano respecto de r y en distinto que C.

4.° Si $M \varepsilon AB$, obtenemos los mismos subcasos anteriores: 4_a) (AA'R) y (BRB'). 4_b) (ARA') y (BB'R). Si r es exterior a ABC, obtenemos: 4_c) (A'AR) y (B'RB) y 4_d) (A'RA) y (B'BR).

5.° Si r es exterior a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, deja a A y B en el mismo semiplano y a C en distinto; como se comprueba fácilmente (figura 5), pueden presentarse los siguientes subcasos: 5_a) (RA'A) y (RB'B). 5_b) (RAA') y (RBB'). 5_c) (ARA') y (BRB').

Si r es exterior a $\overset{\triangle}{ABC}$, A' y B' están en un mismo semiplano respecto de r y en distinto que C', y se pueden presentar los siguientes subcasos: 5_d) (RAA') y (RBB'). 5_e) (RA'A) y (RB'B). 5_f) (A'RA) y (B'RB).

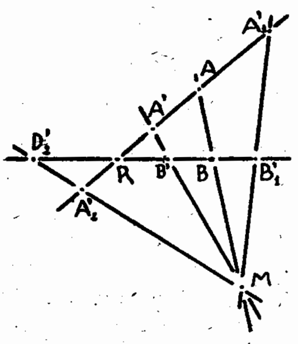

Figura 5

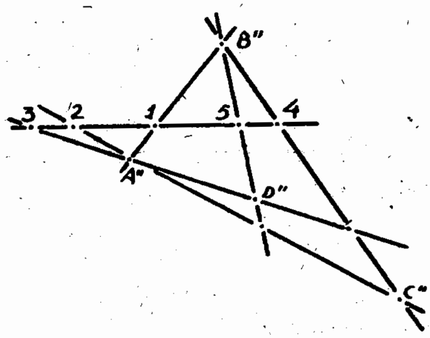

Figura 6

6.° En este caso pueden presentarse los siguientes subcasos: 6_a) (RA'A) y (RB'B). 6_b) (RAA') y (RBB'). 6_c) (ARA') y (BRB').

Procederemos ahora del siguiente modo: por la recta r trazaremos un plano σ distinto de π, y en él tomaremos un punto X no incidente con r.

En el caso 1_b) en que se verifica (A'AR) y (BB'R), al punto X le llamaremos A'' y en la recta A'A'' tomaremos un punto Q no incidente con π ni con σ, tal que (A''A'Q); por estar B' y C' en distinto semiplano que A' respecto de r, están en distinto semiespacio respecto de σ, y en virtud de la relación (A''A'Q), resulta que Q está en distinto semiespacio que B' y C' respecto de σ, luego, los segmentos $\overline{QB'}$ y $\overline{QC'}$ cortan a σ en puntos B'' y C'', e. e. (QB''B') y (QC''C'). Resulta inmediatamente que las rectas

$A''B''$, $A''C''$ y $B''C''$ pasan por M, N y P, respectivamente, y que $\{A''B''C''\}$ es un trivértice. Por tener las rectas AB y $A''B''$ un punto común M, definen un plano γ, análogamente AC y $A''C''$ definen un plano β y BC y $B''C''$ un plano α, e. e.

$$\left.\begin{array}{l} A, B, A'', B'' \varepsilon \gamma \\ A, C, A'', C'' \varepsilon \beta \\ B, C, B'', C'' \varepsilon \alpha \end{array}\right\} \quad \text{de aquí resulta que} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = CC'' \\ \alpha \cap \gamma = BB'' \\ \beta \cap \gamma = AA'' \end{array}\right\} \quad (1)$$

Por ser $\{ABC\}$ un trivértice, las rectas CC'', BB'' y AA'' no están en un plano; tampoco pasan por Q, pues si, por ejemplo, AA'' pasase por Q, A coincidiría con A' en contradicción con la hipótesis, luego cada una de ellas de ellas determina con Q un plano; llamemos α' al plano definido por QAA'', β' el definido por QBB'', γ' al definido por QCC''; resulta, por tanto, que

$$\left.\begin{array}{l} A, A', A'', Q \,\varepsilon\, \alpha' \\ B, B', B'', Q \,\varepsilon\, \beta' \\ C, C', C'', Q \,\varepsilon\, \gamma' \end{array}\right\}$$

y de las dos primeras relaciones anteriores se deduce que $R \varepsilon \alpha'$, $R \varepsilon \beta'$, luego:

$$\alpha' \cap \beta' = QR$$

Ahora bien; en el plano α' están contenidos el triángulo $\widehat{RQA'}$ y la recta AA'', y como esta recta no pasa por ningún vértice de aquél y se verifica $(A'AR)$ y $(A''A'Q)$, resulta que el 4.° postulado de orden que la recta AA'' corta al lado RQ en un punto V. En el triángulo $\widehat{RQB'}$ cortado por la recta BB'' obtenemos, en virtud de las relaciones $(QB''B')$ y $(BB'R)$ y del mencionado postulado, que dicha recta corta al lado $\overline{RQ}$; por otra parte, las rectas AA'' y BB'' pertenecen al plano γ; si este plano pasase por Q, las rectas AB y $A'B'$ coincidirían y tendríamos un caso trivial, podemos, por tanto, suponer que esto no sucede, y en tal caso, γ cortará a QR en un único punto, luego BB'' pasa por V; ahora bien, de aquí y de (1) resulta que V pertenece a $\alpha \cap \gamma$ y a $\beta \cap \gamma$, luego pertenece a α y a β y, por tanto, a $\alpha \cap \beta = CC''$ esto es, CC'' pasa por V, luego γ' contiene a QR y, por tanto, CC' pasa por R.

En el caso 1_a), al punto X le llamaremos A'' y tomaremos Q en la recta AA″, de modo que (A″AQ); proyectaremos desde Q el triángulo $\widehat{ABC}$ sobre σ, sea $\widehat{A''B''C''}$ el triángulo proyección, en virtud de las relaciones (AA′R) y (B′BR), obtendríamos, sin más que cambiar las letras acentuadas en letras sin acento, y recíprocamente, el mismo resultado anterior.

En el caso 2_a) procederíamos exactamente igual que en el 1_a).

En el caso 2_b), por ser P exterior al segmento $\overline{BC}$, se verificará (PBC) o (PCB). En el primer caso, al punto X le llamaríamos C″, y tomaríamos Q de modo que (C″CQ), en el triángulo $\widehat{PCC''}$ cortado por QB, en virtud de (PBC) y (C″CQ) resulta que BC corta a $\overline{PC''}$ en un punto B″; por otra parte, en el triángulo $\widehat{QB''C''}$ y en virtud de (C″CQ) y (PB″C″), resulta (QBB″). En la hipótesis (PCB) al punto X le llamaríamos B″, tomaríamos Q de modo que se verificase (QBB″), y como en el caso anterior, se demuestra que la recta QC corta al lado PB″ en un punto C″, tal que (QCC″); en ambos casos procederemos ahora del siguiente modo: proyectando desde Q el punto A sobre el plano σ, como A está en distinto semiplano que C respecto de r, está también en distinto semiespacio que C y que Q respecto de σ; luego, el segmento $\overline{AQ}$ corta a σ en un punto A″, e. e. (AA″Q). Ahora bien, en el triángulo $\widehat{RQA}$, cortado por la recta A′A″ y en virtud de las relaciones (A′AR) (AA″Q) y del postulado O_4, resulta que la recta A′A″ corta al lado RQ en un punto V. Análogamente, en el triángulo $\widehat{RQB}$ cortado por B′B″ y en virtud de (BB′R) y (QBB″), resulta que la recta B′B″ corta al segmento $\overline{RQ}$. El resto de la demostración es como en el caso 1_b).

3_a) (AA′R) y (BRB′). En este caso al punto X le llamaremos A″, tomaremos Q de modo que (A″AQ) y proyectaremos desde Q el triángulo $\widehat{ABC}$ sobre el plano σ. El resto de la demostración coincide con la del caso 1_a).

3_b) (ARA′) y (BB′R). En este caso a X le llamaremos C″, tomaremos Q de modo que se verifique (C″C′Q) y proyectaremos desde Q el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ sobre σ; se verificará (A′A″Q) y (B′B″Q). En el triángulo $\widehat{A'RQ}$ en virtud de (A′A″Q) y (ARA′), resulta que la recta AA'' corta al lado $\overline{RQ}$ y en el triángulo $\overset{\triangle}{B'RQ}$, en virtud de las relaciones $(B'B''Q)$ y $(BB'R)$ resulta que la recta BB'' corta al lado $\overline{RQ}$. Por lo demás, la demostración es análoga a la del caso 1_b).

3_c) y 3_d) Estos casos se obtienen de 3_a) y 3_b), respectivamente, sin más que cambiar entre sí los papeles de los triángulos $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y $\overset{\triangle}{ABC}$.

En los casos 4_a) y 4_b), en que r es exterior a $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, tomaremos $X \equiv A''$ y Q de modo que $(A'A''Q)$, proyectaremos $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ desde Q sobre σ, y resulta inmediatamente que se verifica $(B'B''Q)$ y $(C'C''Q)$; en virtud de las relaciones 4_a) y 4_b) se termina la demostración como en el caso 1_b).

Los casos 4_c) y 4_d se tratan como los 4_a) y 4_b), sin más que cambiar entre sí los papeles de los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$.

En los casos 5_a) y 5_c), proyectaríamos el triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ sobre σ tomando $X \equiv A''$ y $(A'A''Q)$.

En el caso 5_b), tomaríamos $X \equiv C''$ y $(C''CQ)$; proyectaríamos desde Q el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ sobre σ. El resto de la demostración como en el caso 1_a).

Los casos 5_d), 5_e) y 5_f) se obtienen de los 5_a), 5_b) y 5_c) respectivamente, sin más que sustituir el triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ por el $\overset{\triangle}{ABC}$.

En los casos 6_a) y 6_c) proyectaríamos el triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, y en el caso 6_b) el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. c. q. d.

Teorema 2. (Recíproco del anterior). Si $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ son dos triángulos de un plano π, que no tienen ningún vértice común, tales que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto R, las rectas AB y $A'B'$ y AC y $A'C'$ se cortan en puntos M y N, respectivamente, y la recta BC corta a la recta $r \equiv MN$ en un punto P, entonces la recta $B'C'$ pasa por P.

Demostración.—En virtud de la hipótesis, se verifica que los triángulos $\overset{\triangle}{BB'M}$ y $\overset{\triangle}{CC'N}$ son tales que las rectas BB' y CC' se cortan en R, las BM y CN en A, las B'M y C'N en A' y estos tres puntos A, A', R están alineados; además, las rectas BC y MN se cortan en P, luego por el teorema anterior, B'C' pasa por P. c. q. d.

Definición 1.—Dos triángulos en las condiciones de las hipótesis del teorema 1, diremos que son homológicos; al punto R le llamaremos centro y a la recta r eje de la homología.

Notaciones.—En lo que sigue emplearemos las notaciones siguientes: 1. Los rayos los representaremos por letras minúsculas acentuadas; al rayo opuesto a un rayo h', lo representaremos por h''. Al rayo de origen A que contiene al punto B lo representaremos por $\uparrow AB$; al rayo de origen A que no contiene a B, lo representaremos por $-\uparrow AB$. 2. Al ángulo convexo definido por los rayos h' y k' lo representaremos por $\widehat{h', k'}$.

Lema 1.—Si $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son dos triángulos de un plano tales que las rectas AB y A'B', BC y B'C' y AC y A'C' se cortan en puntos M, P y N, respectivamente, de una recta r, se puede determinar otro triángulo $\widehat{A''B''C''}$ homológico con $\widehat{ABC}$ y con $\widehat{A'B'C'}$ respecto de la recta r como eje de homología.

Demostración.—Distinguiremos los siguientes casos: 1. (MAB) y (MA'B'). Sea h una recta que pasa por M que tiene un rayo h' interior al ángulo $\widehat{\uparrow MA, \uparrow MA'}$. Tomaremos un punto A'' en h'. Distinguiremos ahora los siguientes subcasos: 1_a) (MNP); en este caso tomaremos un punto B'' en h''; en el triángulo $\widehat{B''MP}$, se verifica (MNP) y (B''MA''), luego la recta A''N corta a $\overline{B''P}$ en un punto que llamaremos C''. Por otra parte, en el triángulo B''MB se verifica (B''MA'') y (MAB), luego la recta A''A corta al lado $\overline{B''B}$ en un punto R_1; y en el triángulo $\widehat{B''MB'}$ se verifica (MA'B') y (B''MA''), por tanto, la recta A'A'' corta al segmento $\overline{B'B''}$ en un punto R_2.

1_b) (MPN). En este caso es completamente análogo al anterior.

1_c) (NMP). En la recta NA'' tomaremos un punto C'', tal que (C''NA''); de esta relación y de (NMP), resulta que M es interior al triángulo $A''C''P$ y, por tanto, la recta MA'' corta al lado $C''P$ en un punto B'', tal que $(B''MA'')$. De esta relación y de (MAB), resulta qu ela recta AA'' corta a la BB'' en un punto R_1. Análogamente, de $(B''MA'')$ y $(MA'B')$ resulta que $A'A''$ corta a $B'B''$ en un punto R_2.

2. (MBA) y $(MA'B')$. En este caso tomaremos h' y A'' en las mismas condiciones que en el caso anterior. Distinguiremos también los tres subcasos siguientes: 2_a) (MNP) y 2_b) (MPN). En estos dos casos se construye el triángulo $\widehat{A''B''C''}$ del mismo modo que en los casos 1_a) y 1_b) respectivamente. En el triángulo $\widehat{MAA''}$ en virtud de las relaciones (MBA) y $(A''MB'')$, resulta que la recta BB'' corta al segmento $\overline{AA''}$ en un punto R_1. En el triángulo $\widehat{MB'B''}$, en virtud de las relaciones $(A''MB'')$ y $(MA'B')$, resulta que la recta $A'A''$ corta al segmento $\overline{B'B''}$ en un punto R_2.

2_c) (NMP). Este caso es completamente análogo al 1_c).

3. (AMB) y $(MA'B')$. Sea h' un rayo de origen M, tal que el rayo $\uparrow MA$ sea interior al ángulo $\widehat{h', \uparrow MA'}$. 3_a) (MNP); tomaremos en h' dos puntos A'' y B'' tales que $(MB''A'')$; en el triángulo $\widehat{MB''P}$, en virtud de las relaciones (MNP) y $(MB''A'')$, resulta que la recta $A''N$ corta al segmento $\overline{B''P}$ en un punto C''. En el triángulo $\widehat{AA''M}$, y en virtud de las relaciones (AMB) y $(MB''A'')$, resulta que la recta BB'' corta al segmento $\overline{AA''}$ en un punto R_1. En el triángulo $\widehat{MB'B''}$, y en virtud de las relaciones $(MA'B')$ y $(MB''A'')$, resulta que la recta $A'A''$ corta al segmento $\overline{B'B''}$ en un punto R_2.

3_b) (MPN). En h' tomaremos el punto A'' y en la recta NA'' un punto C'' tal que $(C''A''N)$; en el triángulo $\widehat{A''MN}$, en virtud de las relaciones (MPN) y $(C''A''N)$, resulta que la recta $C''P$ corta a $\overline{MA''}$ en un punto B'', e. e. $(MB''A'')$. El resto de la demostración es como en el caso anterior.

3_c) (NMP). En un rayo h' de origen M, tomaremos A'' y

B'' de modo que (MB''A''); en el triángulo $\widehat{NA''M}$, en virtud de (NMP) y (MB''A''), resulta que PB'' corta a $\overline{A''N}$ en un punto C''. El resto de la demostración es como en el primer caso.

4. (MBA) y (MB'A'). Coincide con el primer caso, sin más que cambiar A por B y A' por B'.

5. (AMB) y (MB'A'). Tomaremos dos puntos A'' y B'' alineados con M y tales que (MA''B''). Por lo demás, este caso coincide con el tercero.

6. (MAB) y (A'MB'). Este caso coincide con el tercero sin más que cambiar A por A' y B por B'.

7. (MBA) y (A'MB'). Mediante la sustitución indicada en el caso anterior, coincide con el quinto.

8. (AMB) y (A'MB'). 8_a): (MNP). Tomaremos dos puntos A'' y B'' alineados con M, tales que (MA''B''). En el triángulo $\widehat{MA''N}$ resulta que la recta PB'' corta a A''N en un punto C''.

8_b) (MPN). Tomaremos A'' y B'' alineados con M y tales que (MB''A'').

8_c) (NMP). En este caso tomaremos (MA''B''). En los tres subcasos del caso octavo se demuestra sin dificultad que las rectas AA'' y BB'' se cortan en un punto R_1, y las rectas A'A'' y B'B''s e cortan en otro punto R_2. c. q. d.

TEOREMA 3.—(De los cuadrivértices homológicos).—Si ABCD y A'B'C'D' son dos cuadrivértices de un plano, tales que los puntos

$$1 = AB \cap A'B', \quad 2 = AC \cap A'C', \quad 3 = AD \cap A'D',$$
$$4 = BC \cap B'C', \quad 5 = BD \cap B'D'$$

están en una recta r, y la recta CD corta a r en un punto 6, la recta C'D' pasa por 6.

Demostración.—Si las rectas AA' y BB' no se cortan, podremos determinar un trivértice A''B''C'', tal que A''B'' pase por 1, A''C'' por 2 y B''C'' por 4, que las rectas AA'' y B''B se corten en un punto R_1 y las rectas A'A'' y B''B' en un punto R_2. Ahora bien, en los casos: 1_a), 1_b), 2_a), 2_b), 3_a), 3_c), 4_a), 4_b), 5_a), 5_c), 6_a), 6_c), 7_a), 7_c), 8_a), 8_b), 8_c), se determinan los puntos A'' y B'', con la única condición de que entre ellos y el punto M se verifique una relación d e«estar entre», en todos estos casos podemos añadir, por tanto, la condición de que las rectas A''3 y B''5 se corten en un punto D″. Examinemos ahora los casos restantes del lema anterior: 1.° (1BA), (1A′B′) y(214). En este caso hemos fijado A″ y B″ de modo que se verifique (A″MB″) y que las rectas 2A″ y 4B″ se corten en un punto C″, podemos, además, exigir que se corten las rectas 3A″ y 5B″ en otro punto D″. En efecto, si 1 es exterior al segmento 35, esto será siempre posible; en caso contrario, e. e. si se verifica (3, 1, 5), puede suceder que los pares de puntos (3, 5) y (2, 4) se separen o no se separen. En el primer caso distinguiremos los siguientes subcasos: 1_a) (fig. 6) (32154). En este caso trazaremos por 4 una recta *m* distinta de *r*, tomaremos dos puntos C″ y B″ de esta recta, tales que (B″4C″), la recta $\underline{B''1}$ cortará al segmento 2C″ en un punto A″, y la recta 3A″ cortará a la recta B″5 en un punto D″ interior al triángulo $\overset{\triangle}{24C''}$.

1_b) (52134) (fig. 7). En este caso tomaremos un punto B″ no situado en la recta *r* y en la recta B″4 otro punto C″ tal que

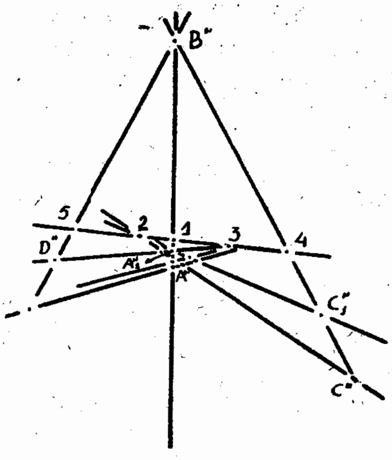

Figura 7

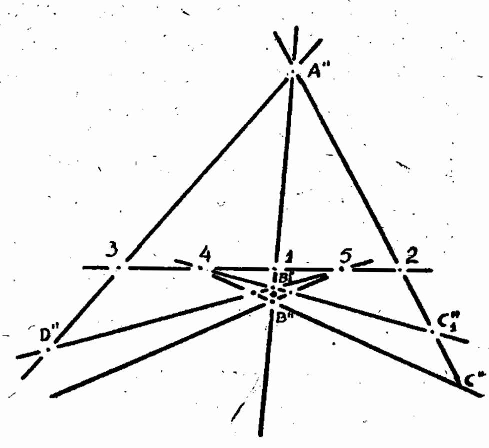

Figura 8

(B″4C″) y en virtud de (214), resulta que 2 y C″ están en distinto semiplano respecto de $\underline{B''1}$, luego, esta recta cortará al segmento 2C″ en un punto A″ y se verificará (B″1A″), si la recta A″3 corta a la recta B″5; al punto de intersección le llamaremos D″, en caso contrario, tomaremos un punto D″ en la recta B″5 tal que se verifique (B″5D″), de esta relación y de (513) resulta que la recta B″1 corta a D″3 en un punto A_1'', evidentemente (B″1A″).

Si fuese $(1A''A_1'')$, el rayo $\uparrow 3A''$ sería interior al ángulo $\widehat{53A_1''}$, y por tanto, cortaría a $5D''$; luego, será $(1A_1''A'')$, y el punto A_1'' será interior al triángulo $24C''$, y el rayo $\uparrow 2A_1''$ cortará a $\overline{4C''}$ en un punto C_1''. El cuadrivértice $\{A_1''B''C_1''D''\}$ resuelve la cuestión.

$1_c)$ (34152) (fig. 8). Sea A'' un punto no incidente con la recta r, C'' un punto de $\underline{2A''}$ tal que $(A''2C'')$, la recta $\underline{A''1}$ cortará al segmento $4C''$ en un punto B'', si la recta $B''5$ corta a la $A''3$, al punto de intersección le llamaremos D'', en caso contrario, procederemos de modo análogo al caso anterior.

$1_d)$ (54132). Este caso es análogo al $1_a)$.

$1_e)$ (35) y (24) no se separan y se verifica (32145) (fig. 9). Tomaremos un punto A'' no incidente con r, y en el rayo $\uparrow A''3$ un

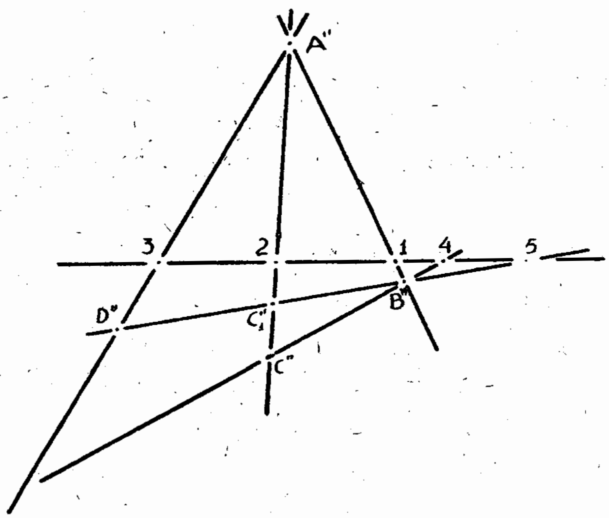

Figura 9

punto X tal que $(A''3X)$; el segmento $\overline{X4}$ corta a los rayos $\uparrow A''2$ y $\uparrow A''1$ en puntos C'' y B'', la recta $5B''$ cortará al segmento $\overline{X3}$ en un punto D''.

$1_f)$: (34125) (fig. 10). Tomemos un punto A'' no incidente con r, y en $\underline{A''3}$ un punto D'', tal que $(D''3A'')$, el segmento $\overline{D''5}$ corta al rayo $\uparrow A''1$ en un punto B''. Si la recta $B''4$ corta a la $A''2$, al punto de intersección le llamaremos C'', en caso contrario, tomaremos en $A''2$ un punto C'' tal que $(A''2C'')$; el segmento $\overline{4C''}$ cortará al $\overline{1B''}$ en un punto B_1'' y el rayo $\uparrow 5B_1''$ cortará al segmento $\overline{3C''}$ en un punto D_1''. El cuadrivértice $\{A''B_1''C''D_1''\}$ resuelve la cuestión.

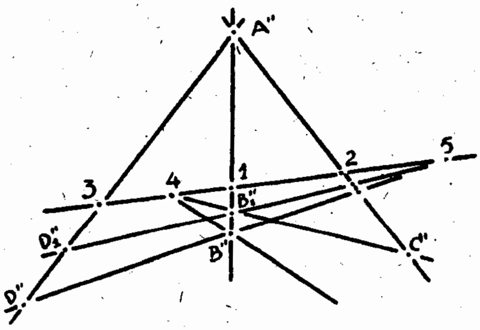

Figura 10

1_g) (23154) (fig. 11). En la recta $A''2$ tomaremos un punto X tal que $(A''2X)$, el rayo $\uparrow A''1$ cortará a $\overline{X5}$ en un punto B'' y el rayo $\uparrow A''3$ le cortará en D''; la recta $\underline{B''4}$ corta a $\overline{X2}$ en un punto C''.

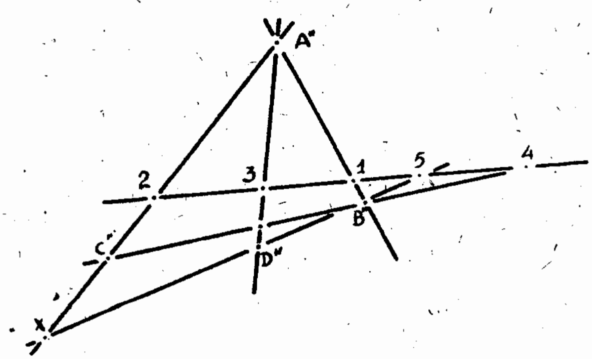

Figura 11

1_h) (52143) (fig. 12). Tomaremos $(A''3C'')$ y definiremos $B'' = 5D'' \cap \uparrow A''1$, si la recta $\underline{B''4}$ no corta a la $\underline{A''2}$, tomaremos en ésta un punto C'' tal que $(A''2C'')$.

Vamos a ocuparnos ahora del caso correspondiente al 3_b) del lema anterior.

2) Tomaremos un punto A'' no incidente con r; en virtud

de la relación (142), tomaremos en $A''2$ un punto C'', tal que $(A''2C'')$ y la recta $C''4$ cortará al segmento $\overline{1A''}$ en un punto B'' y será $(1B''A'')$; si $B''5$ corta $A''3$, al punto de intersección le llamaremos D'', en caso contrario, el punto 5 pertenecerá al segmento $\overline{13}$, y entonces tomaremos un punto D'' en la recta $A''3$, tal que se verifique que $(A''3D'')$, la recta $D''5$ cortará a $\overline{1A''}$ en un punto B_1'' del segmento $\overline{1B''}$; pues si $B_1'' \varepsilon \overline{B''A''}$, el rayo $-\!\!\uparrow 5B''$ sería interior al ángulo $-\!\!\uparrow \widehat{5B'', \uparrow 53}$ y cortaría al segmento $3D''$; luego se verifica $(1B_1''B''A'')$ y, por tanto, la recta $\underline{B_1''4}$ corta a $\overline{A''C''}$ en un punto C_1''. El cuadrivértice $\{A''B_1''C_1''D''\}$ resuelve la cuestión en este caso.

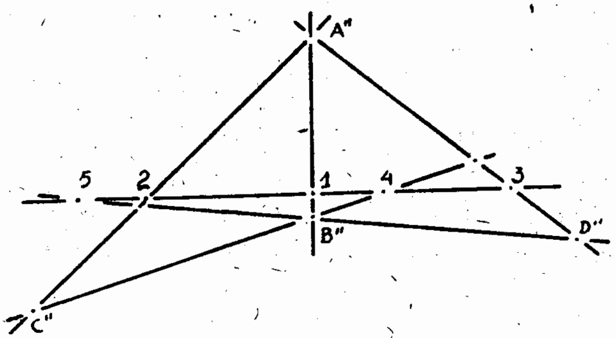

Figura 12

Los otros casos se reducen a éstos mediante un simple cambio de letras.

El cuadrivértice $\{A''B''C''D''\}$ que acabamos de construir, es tal que las rectas $\underline{A''B''}$, $\underline{A''C''}$, $\underline{A''D''}$, $\underline{B''C''}$ y $\underline{B''D''}$ pasan por 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente, las rectas AA'' y BB'' se cortan en un punto R_1 y las $A'A''$ y $B'B''$ en otro punto R_2. Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A''B''C''}$, son homológicos y, por tanto, la recta CC'' pasa por R_1; análogamente, los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{A''B''D''}$ son homológicos, luego la recta DD'' pasa por R_1, resulta, por tanto, que los triángulos $\widehat{ACD}$ y $\widehat{A''C''D''}$ son tales que las rectas AA'', CC'' y DD'' pasan por R_1, las rectas AC y $A''C''$ se cortan en 2, las rectas AD y $A''D''$ en 3 y la recta CD corta a la recta $r \equiv 12$

en 6, luego (por el teorema 2), C″D″ pasa por 6. Las mismas relaciones existen entre {A″B″C″D″} y {A′B′C′D′}, luego la recta C′D′ pasa por 6. c. q. d.

2. OPERACIONES CON LOS PUNTOS DE UN SEGMENTO ABIERTO

En lo que sigue consideraremos una recta r fija y un segmento $\overline{-\mathrm{I}\,\mathrm{I}}$ de la misma; llamaremos O a un punto interior al segmento que supondremos fijo en todo lo que sigue. Llamaremos 1 a un punto que no pertenece a la recta r; al conjunto de todos los puntos de los segmentos $\overline{-\mathrm{I}1}$, $\overline{\mathrm{I}1}$ lo representaremos por i. En el segmento O1 tomaremos un punto 2 interior al mismo; al punto de intersección de I2 con $\overline{1-\mathrm{I}}$ le llamaremos P y al punto de intersección de —I2 con $\overline{1\mathrm{I}}$ le llamaremos Q.

Definición 2.—Dados dos puntos A y B interiores al segmento $\overline{-\mathrm{I}\,\mathrm{I}}$, llamaremos suma de A y B y la representaremos por A+B al punto del segmento $\overline{-\mathrm{I}\,\mathrm{I}}$ obtenido mediante la construcción siguiente: *a*) Si B pertenece al segmento $\overline{\mathrm{OI}}$, uniremos

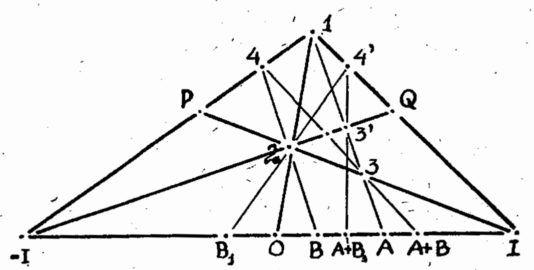

Figura 13

A con 1 y cortaremos por el segmento $\overline{\mathrm{IP}}$, a este punto de intersección le llamaremos 3. *b*); si B pertenece a $\overline{-\mathrm{IO}}$, llamaremos 3 al punto de intersección de $\overline{1\mathrm{A}}$ con el segmento $\overline{-\mathrm{IQ}}$. El punto B se une con 2 y se llama 4 al punto de intersección de B2 con i. La recta 34 corta al segmento $\overline{-\mathrm{I}\,\mathrm{I}}$ en el punto A+B.

Para justificar la posibilidad de esta definición demostraremos el siguiente

TEOREMA 4.—La recta 34 de la definición anterior corta al segmento $\overline{-II}$.

Demostración.—Distinguiremos los siguientes casos: 1.° A y B pertenecen a $\overline{OI}$. En este caso el segmento 1A corta al $\overline{2I}$ en un punto 3; la recta B2 corta al segmento P1 en un punto 4. De las relaciones $(-IP4)$ y $(P3I)$ se deduce que la recta 34 corta al lado $\overline{-II}$ del triángulo $\overset{\triangle}{-IIP}$.

2.° $A \varepsilon \overline{OI}$, $B \varepsilon \overline{-IO}$. El segmento $\overline{1A}$ corta al $\overline{Q2}$ en un punto 3 y la recta B2 corta al segmento $\overline{1Q}$ en un punto 4. En el triángulo $\overset{\triangle}{-IQI}$, en virtud de las relaciones $(4QI)$ y $(-I3Q)$ resulta que la recta 34 corta al segmento $-II$ y, además, que el punto $A+B$ pertenece al segmento $\overline{BA}$.

3.° $A \varepsilon \overline{-IO}$, $B \varepsilon \overline{OI}$. El segmento $\overline{A1}$ corta al $\overline{IP}$ en un punto 3 y la recta B2 corta al segmento $\overline{P1}$ en un punta 4; de las relaciones $(-IP4)$ $(P3I)$, resulta que la recta 34 corta a $\overline{-II}$ y que $A+B$ está entre A y B.

4.° $A \varepsilon \overline{-IO}$, $B \varepsilon \overline{-IO}$. El segmento $\overline{A1}$ corta al $\overline{-IQ}$ en 3 y la recta B2 corta a $\overline{1Q}$ en 4. De $(-I3Q)$ y $(4QI)$ resulta que 43 corta a $\overline{-II}$.

TEOREMA 5.—(Propiedad uniforme). La suma de dos puntos no depende de los puntos auxiliares 1 y 2.

Demostración.—Sea C el punto obtenido como suma de A y B mediante los puntos auxiliares 1 y 2; llamemos 3 y 4 a los puntos que así hemos llamado en la definición 2. Sean 1′ y 2′ otros dos puntos auxiliares y 3′ y 4′ los puntos construídos en la definición 2 para sumar A y B mediante 1′ y 2′. Los cuadrivértices $\{1234\}$ y $\{1'2'3'4'\}$ son homológicos y, por el teorema 3, la recta 3′4′ pasa por C. c. q. d.

TEOREMA 6.—Las ecuaciones $A+X=B$ y $X+A=B$, en donde A y B son dos puntos cualesquiera del segmento abierto $\overline{-II}$ tienen siempre solución única.

Demostración.—Para cada ecuación hay que distinguir los siguientes casos: 1.° (OABI); 2.° (OBAI); 3.° (BOAI); 4.° (AOBI); 5.° $(-IABO)$; 6.° $(-IBAO)$.

1.° (OABI). Para la primera ecuación se procede del siguiente modo: se llama 3 al punto de intersección de 1A con $\overline{IP}$ y 4 al punto de intersección de B3 con $\overline{-I1}$; el punto X de intersección de la recta 24 con el segmento $\overline{-II}$, que evidentemente existe y es único, resuelve la cuestión. Para la segunda ecuación se llama 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{-I1}$, 3 al punto de intersección de 4B con $\overline{IP}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

2.° (OBAI). Se llama 3 al punto de intersección de 1A con $\overline{-IQ}$; 4 al punto de intersección de B3 con 1I y X al punto de intersección de 24 con $\overline{-II}$. Para la segunda ecuación se llama 4 a lpunto de intersección de A2 con —I1; 3 al punto de intersección de B4 con $\overline{IP}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

3.° (BOAI). Para la primera ecuación se llama 3 al punto de intersección de 1A con $\overline{-IQ}$; 4 al punto de intersección de B3 con $\overline{1I}$ y X al punto de intersección de 24 con $\overline{-II}$. Para la segunda ecuación se llama 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{-I1}$; 3 al punto de intersección de B4 con $\overline{IP}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

4.° (AOBI). Para la primera ecuación se llama 3 al punto de intersección de 1A con $\overline{PI}$; 4 al punto de intersección de B3 con $\overline{-I1}$ y X al punto de intersección de 24 con $\overline{-II}$. Para la segunda casación se llama 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{-I1}$; 3 al punto de intersección de 4B con $\overline{-IQ}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

5.° (ABOI). Para la primera ecuación se llama 3 al punto de intersección $\overline{A1}$ con $\overline{IQ}$; 4 al punto de intersección de $\overline{B3}$ con $\overline{-I1}$ y X al punto de intersección de 24 con $\overline{-II}$. Para la segunda ecuación se llama 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{1I}$; 3 al punto de intersección de B4 con $\overline{IP}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

6.° (BAOI). Para la primera ecuación se llama 3 al punto de intersección de A1 con $\overline{-IQ}$; 4 al punto de intersección de B3 con $\overline{I1}$ y X al punto de intersección 24 con $\overline{-II}$. Para la segunda ecuación, se llama 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{I1}$; 3 al punto de intersección de 4B con $\overline{-IQ}$ y X al punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$.

La construcción da en cada caso un punto X único.

Corolario.—Si A es un punto cualquiera del segmento abierto $\overline{-II}$, existen dos elementos perfectamente determinados, que representaremos por —A y A′, tales que $(-A)+A=0$ y $A+A'=0$. Al elemento —A le llamaremos opuesto de A por la izquerda y al elemento A′ opuesto de A por la derecha.

Teorema 7.—El elemento opuesto por la derecha de todo elemento coincide con su opuesto por la izquierda.

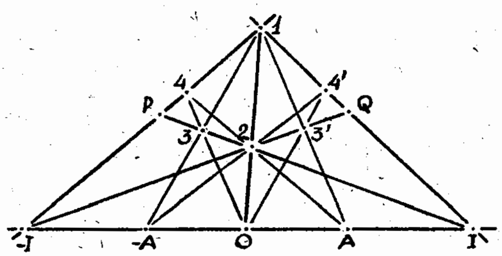

Figura 14

Demostración (fig. 14).—Para determinar el punto —A procederemos del siguiente modo: llamaremos 4 al punto de intersección de A2 con $\overline{-I1}$; 3 al punto de intersección de $\overline{O4}$ con $\overline{IP}$ o con $\overline{-IQ}$, según que A pertenezca al segmento $\overline{OI}$ o al $\overline{-IO}$, respectivamente; —A será el punto de intersección de 13 con $\overline{-II}$. Por otra parte, llamaremos 3′ al punto de intersección de 1A con $\overline{-IQ}$ o con $\overline{IP}$, según que A pertenezca al segmento $\overline{OI}$ o al $\overline{-IO}$, respectivamente; 4′ al punto *i* ∩ O3′; el punto de intersección de 24′ con $\overline{-II}$ será el punto A′. Los cuadrivértices $\{1\,2\,3\,4\}$ y $\{2\,1\,4'\,3'\}$ son homológicos, luego —A coincide con A′. La demostración anterior establece también que si A pertenece al segmento $\overline{OI}$, su opuesto pertenece al $\overline{-IO}$, y recíprocamente.

A los puntos del segmento —IO los representaremos con el signo — delante, y les llamaremos negativos.

Del teorema anterior resulta que $-(-A)=A$.

TEOREMA 8.—La propiedad conmutativa es válida para la adición de dos puntos de signo distinto y no lo es para la adición de puntos del mismo signo.

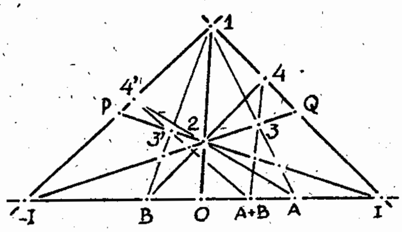

Figura 15

Demostración.—1.° (fig. 15). $A+(-B)=(-B)+A$. La demostración es completamente análoga a la del teorema anterior.

2.° Sean A y B dos puntos del segmento OI; llamemos 3 al punto de intersección de A1 con $\overline{IP}$; 4 al punto de intersección de B2 con $1\overline{(-I)}$; 3′ al de intersección de $\overline{1B}$ con $\overline{IP}$ y 4′ al de intersección de A2 con $\overline{-II}$; $A+B$ será el punto de intersección de $\overline{34}$ con $\overline{-II}$ y $B+A$ el punto de intersección de $3'4'$ con $\overline{-II}$. Demostrar que estos dos últimos puntos coinciden equivale a demostrar el teorema de Pascal, y este teorema, como es sabido, no es consecuencia de los postulados de incidencia y orden.

TEOREMA 9.—Entre los puntos del segmento abierto $\overline{-II}$ se verifican las siguientes relaciones: 1.ª $(A+B)+C=A+(B+C)$;

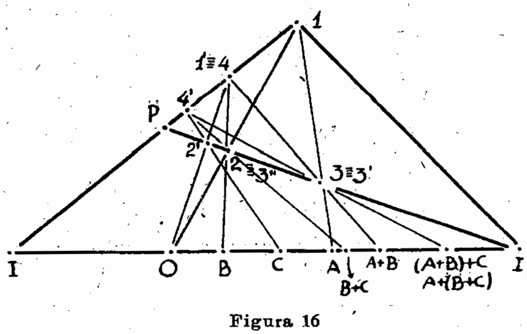

Figura 16

2.ª $(-A-B)-C=-A+(-B-C)$; 3.ª $(A-B)-C=A+(-B-C)$; 4.ª $(-A+B)+C=-A+(B+C)$; 5.ª $(A+B)-C\pm A+(B-C)$;

6.ª $(-A-B)+C$ ‡ $-A+(-B+C)$; 7.ª $(A-B)+C$ ‡ $A+(-B+C)$; 8.ª $(-A+B)-C$ ‡ $-A+(B-C)$. (En donde las letras sin signo representan puntos del segmento abierto $\overline{OI}$, y las letras con signo —, puntos del segmento abierto $\overline{-IO}$, y por $A-B$ representamos $A+(-B)$.)

Demostración (fig. 16). 1.º $A, B, C, \varepsilon\, OI$. Como siempre, pondremos: $3=1A \cap IP$, $4=2B \cap -I1$, $A+B=34 \cap -II$. Para sumar $A+B$ con C, tomaremos como punto $1'$ el punto 4, y como punto $2'$ el punto $4O \cap IP$; entonces, $3' \equiv 3$, $4'=2'C \cap -I1$ y $(A+B)+C=3'4' \cap -II$. Para sumar B y C tomaremos como puntos auxiliares los $1'$ y $2'$; el punto $3''=1'B \cap IP$ coincide con 2; al punto $C2 \cap -I1$ le llamaremos $4'$, entonces $B+C=24' \cap -II$. Para sumar A y $B+C$ tomaremos como puntos auxiliares 1 y 2; entonces $3''' \equiv 3$ y $4''' \equiv 4'$, luego $3'''4''' \equiv 4'2$ y, por tanto, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Análogamente se demuestran los casos 2.º, 3.º y 4.º

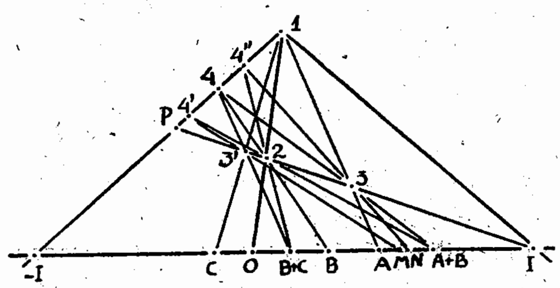

Figura 17

5.º (fig. 17). Por el teormea 8 se verifica $(A+B)-C=-C+ +(A+B)$ y $B-C=-C+B$; por tanto pondremos $3=1A \cap 1P'$ $4=B2 \cap -I1$; $3'=1C \cap IP$, $4=2(A+B) \cap -I1$, $M=3'4' \cap -II$; $B+C= =3'4 \cap -II$; $4''=(B+C),2 \cap -I1$; $N=4''3 \cap -II$ Si $M \equiv N$ en el exágono $\{M, 4', A+B, 4, B+C, 4'\ M\}$ se verificaría

$$M4' \cap (B+C), 4=3'$$
$$4', (A+B) \cap 4'', (B+C)=2$$
$$(A+B), 4 \cap 4''\ M=3$$

y como los puntos 3, 2, 3′ están alineados, se verificaría el teorema de Pascal. En esta demostración hemos supuesto que $B+C\, \varepsilon\, \overline{OI}$.

7.° Si fuese $(A-B)+C=A+(-B+C)$, resultaría

$$(A-B)+C=(-B+A)+C=-B+(A+C)=(A+C)-B$$

y

$$A+(-B+C)=A+(C-B)\,;$$

luego sería $(A+C)-B=A+(C-B)$ en contradicción con el 5.° caso.

Los casos 6.° y 8.° son completamente análogos a los 5.° y 7.° respectivamente.

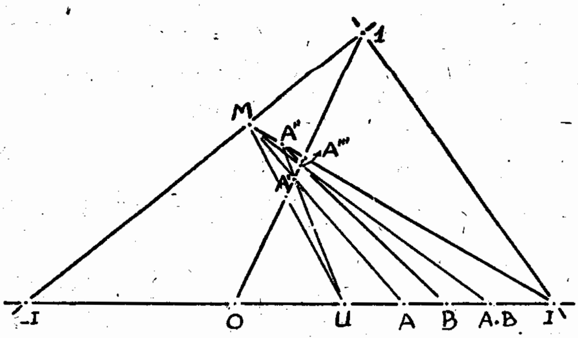

Figura 18

Multiplicación (fig. 18).—Fijaremos un punto U del segmento abierto $\overline{OI}$ al que llamaremos punto unidad. Tomaremos además un punto auxiliar M del segmento —I1. Dados dos puntos A y B del segmento OI, llamaremos A' al punto de intersección de MA con O1, A'' al punto de intersección de UA' con $\overline{-IM}$ o con $\overline{MI}$, A''' al punto de intersección de A''B con el segmento $\overline{O1}$ y A . B al punto de intersección de MA''' con OI.

Se ve sin dificultad que los puntos A', A'', A''' y A . B existen siempre y son únicos. Al punto A . B le llamaremos producto de A por B.

Teorema (Uniformidad).—El producto de dos puntos A y B del segmento abierto OI es independiente de los puntos 1 y M elegidos para la construcción.

Demostración.—Sean M' y 1' otros dos puntos auxiliares y efectuemos la multiplicación de A por B mediante ambos pares de puntos auxiliares; llamemos A', A'', A''', y C a los puntos obtenidos mediante la construcción anterior empleando los puntos auxiliares M y 1, y A_1', A_1'', A_1''' y C' a los puntos análogos en la construcción efectuada con los puntos auxiliares M' y 1'. Los cuadrivértices MA'A''A''' y $MA_1'A_1''A_1'''$ son homológicos, luego C≡C'.

TEOREMA 11 (Propiedad asociativa). (AB) C = A (BC).

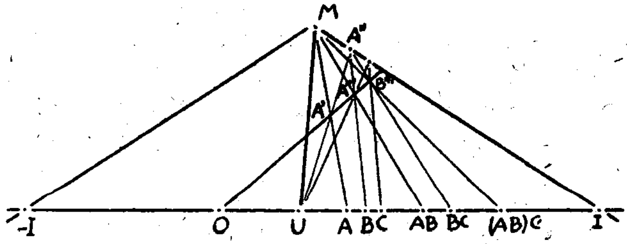

Figura 19

Demostración (fig. 19).—Para efectuar el producto de A y B emplearemos los puntos auxiliares M y 1. Para efectuar el producto (AB) por C y el A por (BC) emplearemos los mismos puntos auxiliares mientras que para efectuar el producto de B y C emplearemos los puntos 1 y M'≡A''. La demostración es, por lo demás, inmediata.

TEOREMA 12.—La propiedad distributiva no es válida.

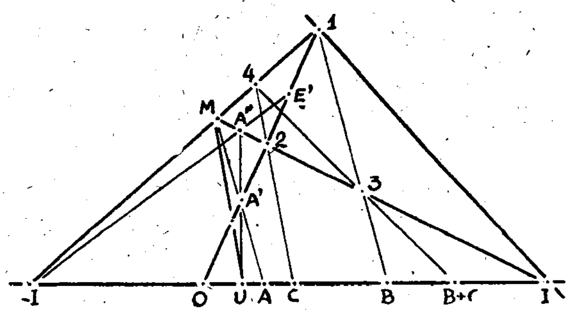

Figura 20

Demostración (fig. 20).—Sean A, B y C puntos del segmento OI; tomemos los puntos auxiliares 1 y 2 para efectuar la adición de B y C; pondremos 3=1B ∩ I2, 4=—I1 ∩ 2C, entonces B+C=3, 4 ∩ —II. Tomaremos como punto M para efectuar la multiplicación del punto —I1 ∩ 2I y pondremos A'=MA ∩ O1,

$A''=UA' \cap IM$ (o bien $A''=UA' \cap -IM$, según que UA' corte a IM o a $-IM$, e. e. según que $A \varepsilon \overline{UI}$ ó $\overline{OU}$), supondremos que se verifica lo primero e. e. que $A \varepsilon \overline{UI}$.

Sea ρ un plano que pasa por r y distinto del plano π del punto 1 y la recta r; vamos a demostrar que existe en ρ un cuadrivértice $\{1'2'3'4'\}$ cuyos lados cortan a r en los puntos $\{-I, O, C, B, B+C, I\}$, y que está totalmente contenido en el interior de la región angular convexa de lados $\uparrow OI$ y $\uparrow OR$, siendo el rayo $\uparrow OR$ un rayo cualquiera de ρ con el origen O y no perteneciente a r. En efecto, llamemos σ al plano definido por O1 y el rayo $\uparrow OR$; σ' al semiplano de σ que tiene por arista la recta que contiene a $\uparrow OR$ y que no contiene al punto 1; ρ' al semiplano de la misma arista del plano ρ que contiene a I. Sea V un punto interior a la región angular triédrica convexa de aristas $\uparrow OI$, $-\uparrow O1$, $\uparrow OR$ y proyectemos desde él el cuadrivértice $\{1234\}$ sobre el plano ρ, llamemos $\{1'2'3'4'\}$ al cuadrivértice proyección, este cuadrivértice está contenido en la región angular convexa de lados $\uparrow OI$, $\uparrow OR$ y se verifica que $1'2'$ pasa por O, $1'3'$ por B, $1'4'$ por $-I$, $2'3'$ por I, $2'4'$ por C, $3'4'$ por $B+C$. Proyectemos ahora el cuadrivértice $\{1'2'3'4'\}$ desde A'' sobre σ y llamemos $\{1''2''3''4''\}$ al cuadrivértice así obtenido, que está contenido todo él en la región angular convexa de lados $\uparrow O1$, $\uparrow OR$. Los puntos $\{O, B, C, B+C, I\}$ se proyectan en puntos $\{O, B', C', D', 2\}$ y el punto $-I$ en un punto E' interior al segmento $\overline{2I}$. Los lados del cuadrivértice $\{1''2''3''4''\}$ pasan por $\{E', O, B', C', D', 2\}$. Al proyectar $\{1''2''3''4''\}$ desde M sobre ρ obtenemos otro cuadrivértice cuyos lados pasan por $\{O, AB, AC, A(B+C), I\}$ y por el punto de proyección de E'; ahora bien, el punto de proyección de este punto no se proyecta sobre $-I$, luego la propiedad distributiva no es válida.

TEOREMA 13.—El producto de la definición anterior no es conmutativo.

Demostración.—Sean A y B dos puntos del segmento OI y M el punto auxiliar para la multiplicación. Pondremos $A'=MA \cap O1$, $A''=UA' \cap MI$ ó $-IM$, $A'''=BA'' \cap O1$; $AB=MA''' \cap -II$; $B'=MB \cap O1$, $B''=MI \cap UB'$, $B'''=O1 \cap B''A$, $BA=MB''' \cap O1$.

Si $BA \equiv AB$ el punto B''' coincidiría con A''' y como los puntos A', $B'A'''$ están alineados, se verificaría el teorema de Pascal para el exágono $\{M, A'B'', U, A'', B\}$.

Teorema 14.—Para todo punto B del segmento OI y todo punto A del segmento UI tiene solución única la ecuación

$$AX = B$$

y para todos los puntos A y B del segmento OI tiene solución única la ecuación

$$XA = B.$$

Demostración. 1.° (fig. 21). Sea A un punto de $\overline{UI}$, llamemos H y K a los puntos de intersección de O1 con $\overline{MU}$ y $\overline{MI}$

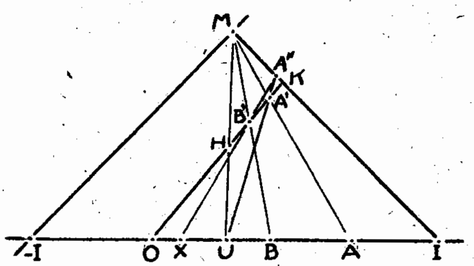

Figura 21

respectivamente, pondremos: $A' = MA \cap O1$, $A'' = MI \cap UA'$, $B' = MB \cap O1$, $X = OI \cap \overline{A''B'}$. De esta construcción y de la hipótesis resulta que (HA'K), (MA"K) y (OXI).

2.° (fig. 22). A y B son puntos cualesquiera de OI, 1 y M

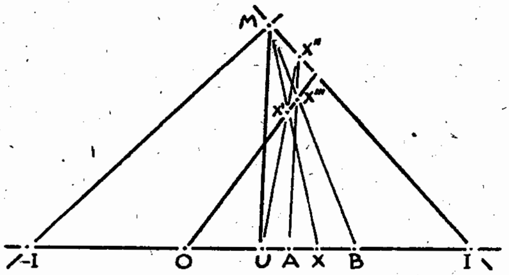

Figura 22

tienen la significación anterior. Pondremos: $X''' = O1 \cap MB$, $X'' = AX''' \cap \overline{MI}$ ó $\overline{M(-I)}$, $X' = UX'' \cap O1$, $X = MX' \cap OI$. De esta construcción resulta que: X'' pertenece a $\overline{MK}$ (siendo $K = OI \cap MI$) o a $-IM$; en ambos casos el punto X' existe y pertenece a OK y por tanto existe X y pertenece a OI.

COROLARIO.—Si A es un punto del segmento UI existe un punto A_D^{-1} del segmento OU, que llamaremos inverso de A por la derecha, tal que $AA_D^{-1} = U$ y para todo punto A de OI existe un punto A_I^{-1}, que llamaremos inverso de A por la derecha tal que $A_I^{-1}A = U$.

Definición 3.—Si A es un punto positivo y B un punto negativo, llamaremos producto de A y B al opuesto del producto de A por el opuesto de B. Si A es un punto negativo y B es positivo, llamaremos producto de A y B al opuesto del producto del opuesto de A por B. Si ambos son negativos llamaremos producto de A y B al producto de sus opuestos.

De esta definición y de los teoremas anteriores resultan inmediatamente las proposiciones siguientes:

1.ª El producto de dos puntos cualesquiera del segmento abierto $-II$ está definido y es único.

2.ª El producto de tres o más puntos del segmento abierto $-II$ goza de la propiedad asociativa.

3.ª Todo punto del segmento abierto $-\overline{II}$ que no pertenece al sgemento abierto $-UU$ posee un inverso por la derecha. Todo punto del segmento abierto $-II$ posee un inverso por la izquierda.

Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas de Zaragoza. Abril 1946.